DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES **DURÉE : 3 HEURES**

Les trois parties du problème sont pratiquement indépendantes les unes des autres.

L'objet du problème est l'étude de surfaces S à partir de définitions différentes et équivalentes.

On suppose que l'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'axes (Ox,Oy,Oz) qui oriente E.

Définitions et rappels :

1. On appelle droites de pente d'un plan P de E les droites de P qui font le plus grand angle possible avec le plan (xOy). Elles sont orthogonales à l'intersection des plans P et (xOy).

2. On appelle ligne de pente d'une surface S de E, de classe C^1, régulière toute courbe $\mathcal{C}$ de S, de classe C^1, régulière, telle qu'en chacun de ses points M, la tangente à $\mathcal{C}$ soit droite de pente du plan tangent en M à S ; $\mathcal{C}$ est orthogonale en chacun de ses points à la courbe, intersection de S avec le plan parallèle à (xOy) et passant par ce point.

3. On appelle hélice d'axe Oz et d'angle α ($\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[$), toute courbe de classe C^1, régulière, dont les tangentes font un angle α, donné, avec Oz.

Question préliminaire :

On considère le plan P d'équation : $ax + by + cz + d = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$ et $c \neq 0$. Déterminer, à l'aide de a, b, c, les composantes d'un vecteur $\vec{V}$ dirigeant les lignes de pente de P.

PARTIE I

On considère la chaînette C de représentation paramétrique : $x = t$, $y = \operatorname{ch} t$, $z = 0$.

1. a. On oriente C dans le sens des t croissants et on appelle φ l'angle de $\vec{I}$ avec le vecteur unitaire $\vec{T}$ de la tangente orientée en M(t) à C. Calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de t.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur déduit de $\vec{T}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians dans le plan (xOy). Déterminer ses composantes en fonction de t.

Soit $\vec{N}$ le vecteur transformé de $\vec{n}$ dans la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ radians et d'axe $(M,\vec{T})$. Montrer que la droite Δ_t déterminée par M et $\vec{N}$ a pour représentation paramétrique :

(1) $X = t - \lambda \operatorname{th} t$, $Y = \operatorname{ch} t + \frac{\lambda}{\operatorname{ch} t}$, $Z = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tournez la page S. V. P.

c. Soit Γ la courbe de représentation paramétrique :

$X = t - \lambda(t).\text{th}t \quad , \quad Y = \text{ch}t + \frac{\lambda(t)}{\text{ch}t} \quad , \quad Z = \lambda(t)$

où λ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la fonction λ de telle sorte que la projection orthogonale γ de Γ sur le plan (xOy) soit la développée de C.
Montrer que Γ est une hélice d'axe Oz.

2. Lorsque (t,λ) décrit $\mathbb{R}^2$ les équations (1) représentent une surface réglée S_1 engendrée par la droite Δ_t.

a. Ecrire l'équation du plan tangent à S_1 en un point $P(t,\lambda)$ de S_1, P n'appartenant pas à Γ. Montrer qu'il est le même le long d'une génératrice.

b. Montrer que la droite Δ_t est une ligne de pente de S_1.

3. On suppose que la surface S_1 admet, localement, une équation de la forme : $z = F(x,y)$ où F est de classe C^2 sur son domaine de définition.

a. Déterminer les expressions de $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en fonction de t.

(On pourra chercher une relation entre t, dx, dy, dz ou utiliser l'équation du plan tangent).

b. Montrer que $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ vérifient une relation indépendante de t.

PARTIE II

1. On considère une courbe C de classe C^2, régulière, définie par les équations paramétriques : $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ où f, g, h sont des fonctions réelles de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On pose : $A = g''.h' - h''.g'$, $B = h''.f' - f''.h'$, $C = f''.g' - g''.f'$ et on suppose : $(A(t),B(t)) \neq (0,0)$ et $C(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

a. A quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire les dérivées f', g', h' de f, g, h pour que la tangente Δ_t à C en un point quelconque M(t) de C fasse un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec Oz ?

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la surface réglée S_2 engendrée par Δ_t lorsque t décrit I.

c. Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent en un point P de S_2, $P \notin C$, et vérifier qu'il est le même tout le long d'une génératrice Δ_t.

2. La condition II.1.a. est supposée vérifiée dans le reste de cette partie II. En utilisant la relation établie par cette condition et celle qu'on obtient en la dérivant, montrer que la génératrice Δ_t est une ligne de pente de la surface S_2.

3. On suppose que la surface S_2 admet une équation de la forme : $z = G(x,y)$ où G est de classe C^2 sur son domaine de définition.
Calculer $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$ en fonction de t et trouver une relation indépendante de t entre $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$.

PARTIE III.

On appelle S_3 une surface telle qu'en tout point de toute ligne de pente C la tangente à C forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec le plan (xOy).

On suppose que cette surface a une équation de la forme $z = F(x,y)$ où F est de classe C^2 sur son domaine $\mathcal{D}$ de définition et que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}.\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \, , \, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0).$$

1. Donner une équation cartésienne du plan tangent en $M(x,y,F(x,y))$ à S_3.
Montrer que le vecteur : $\vec{V}\left(\frac{\partial F}{\partial x} \, , \, \frac{\partial F}{\partial y} \, , \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right)$ est un vecteur directeur des droites de pente de ce plan.

2. En déduire que les lignes de pente de la surface S_3 font un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec le plan (xOy) si et seulement si :

(2) $\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 1$

Quelle relation obtient-on en dérivant (2) par rapport à x ? ... par rapport à y ?

3. Déterminer les surfaces de révolution d'axe Oz d'équation $z = G(x^2 + y^2)$ où G est une fonction de classe C^2 sur son domaine de définition et qui sont des surfaces du type S_3.

4. On se propose d'établir que les lignes de pente de la surface S_3 sont rectilignes. Pour cela on définit une ligne de pente C par les équations : $X = x$, $Y = g(x)$, $Z = F(x,g(x))$ où g est de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On suppose ici $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$.

a. A quelle condition doit satisfaire g pour que la tangente à C en un point quelconque de C soit droite de pente du plan tangent à S_3 en ce point ?

b. Montrer qu'alors le vecteur $\vec{V}\left(\frac{\partial F}{\partial x} \, , \, \frac{\partial F}{\partial y} \, , \, 1\right)$ qui dirige cette tangente, est constant tout le long de C. En conclure que C est rectiligne.

c. Montrer que le plan tangent à S_3 en l'un de ses points est le même le long d'une ligne de pente.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail